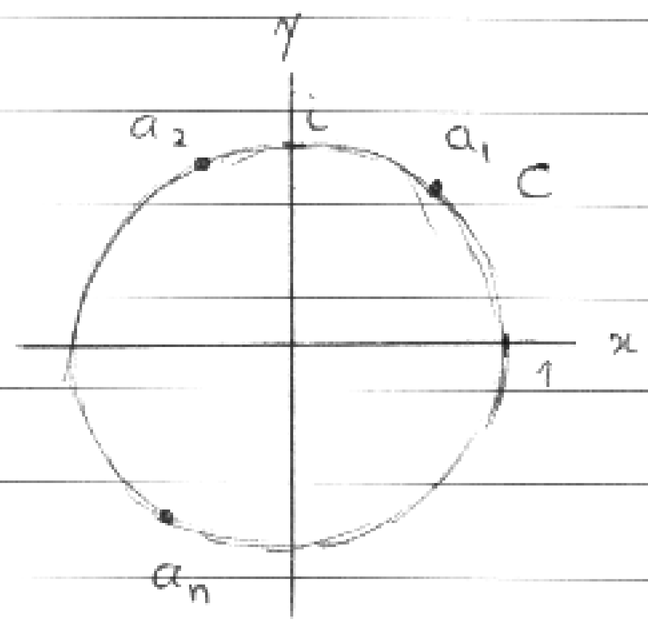
Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 1 / 4
Adres:	Studierichting: Wiskunde	Tentamen: Complexe Analyse
Postcode en		Datum: 21-03-03
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving: 2001	Naam docent: E. Thomas / H. Winkler

opgave I

9,9

1) Maximum-modulus principe: zij $U \subset \mathbb{C}$ open en ~~Sam~~ samenhangend, f holomorf op U en continu op $\overline{U}$ compact (afsluiting van U). Als f niet constant is op U en $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ $\forall z \in U$ dan $z \in \partial U$ (dus het maximum wordt op de rand aangenomen) ✓

2)



Schrijf $f(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - a_j)$

dan is f holomorf daar het een product van holomorfe functies is ✓

$$|f(z)| = \left|\prod_{j=1}^{n} (z-a_j)\right| = \prod_{j=1}^{n} |z-a_j|$$

Stel $z = 0 \Rightarrow f(z) = f(0) = \prod_{j=1}^{n} |-a_j| = \prod_{j=1}^{n} |a_j|$

$= \prod_{j=1}^{n} 1 = 1$ ($|a_j| = 1$ $\forall j$ want de a_j's liggen op C)

Als z_0 een ~~maxim~~ maximum voor $|f|$ is, dan geldt dat $|f(z_0)| \geq |f(0)| = 1$ ✓

Met het maximum-modulus principe volgt dat z_0 op C (= rand van de ~~geslo~~ open eenheidsschijf) ligt. We merken op dat er een maximum moet bestaan, want f is continu en de gesloten eenheidsschijf ~~Dus~~ is een compacte verzameling (Weierstrass!) ✓

Dus $\exists\, z_0 \in \mathbb{C}$ zodanig dat $\prod_{j=1}^{n} |z_0 - a_j| \geq 1$

Waarmee het gevraagde aangetoond is...

opgave II

1) Stelling van Cauchy: zij γ een gesloten keten in $U \subset \mathbb{C}$ open en γ homoloog met 0 in U. Zij f holomorf op U, dan is $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

Formule van Cauchy: zij γ een gesloten keten in $U \subset \mathbb{C}$ open en γ homoloog met 0 in U. Zij f holomorf op U en $z_0 \in U$ dan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = \cancel{W(\gamma, z_0)} f(z_0)$$

O.K

2) $$\int_\Gamma \frac{\sin(z)}{z+3}\,dz = \int_\Gamma \frac{\sin(z)}{z-(-3)}\,dz$$

$$= 2\pi i\, W(\Gamma, -3) \sin(-3)$$

Cauchy toegepast

$$= 2\pi i \sin(-3) = -2\pi i \sin(3)$$

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 2/4
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

Vervolg opgave II 2)

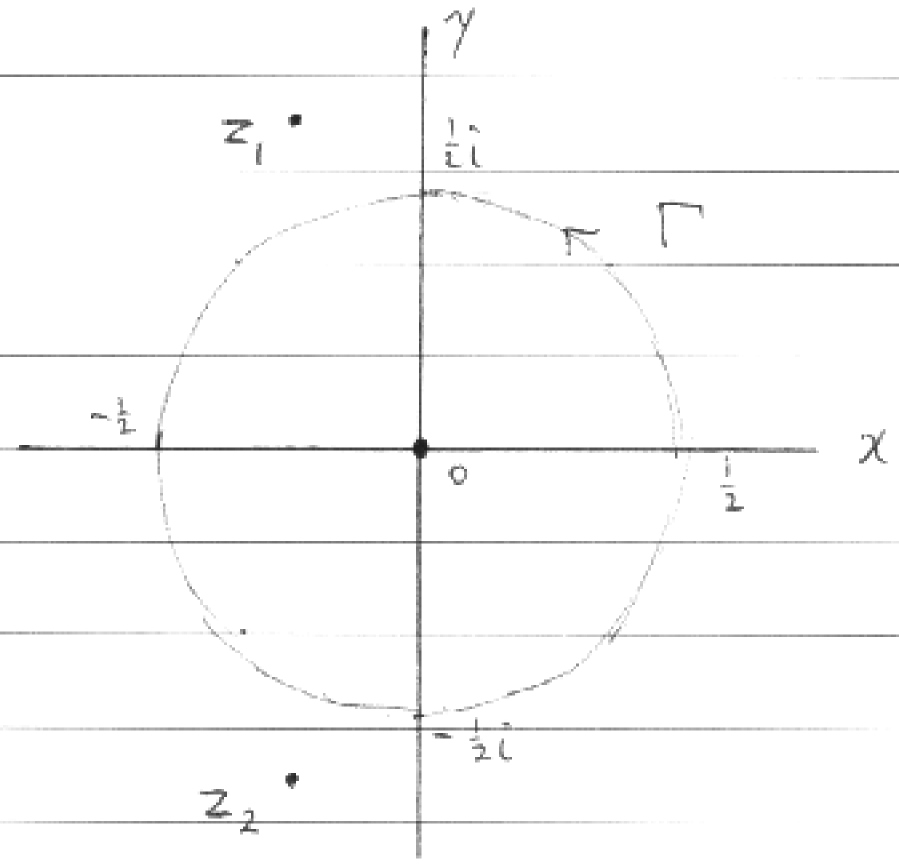
$$2z^2 + z + 1 = 0 \implies z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{4}$$

$$\implies z_1 = -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{7}\, i \qquad z_2 = -\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\sqrt{7}\, i$$

$$2z^2 + z + 1 = (z - z_1)(z - z_2)$$

$$\implies \frac{1}{2z^2+z+1} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{\frac{1}{(z-z_2)}}{z - z_1}$$

We hebben hier echter dat $W(\Gamma, z_1) = W(\Gamma, z_2) = 0$ omdat z_1 en z_2 niet in het binnengebied van Γ liggen



Met Cauchy's formule volgt dan dat

$$\int_\Gamma \frac{dz}{2z^2+z+1} = \int_\Gamma \frac{\frac{1}{z-z_2}}{z-z_1}\, dz = 2\pi i\, W(\Gamma, z_1) \cdot \frac{1}{z_1 - z_2}$$

✓

$$= 2\pi i \cdot 0 \cdot \frac{1}{z_1 - z_2} = 0$$

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 3/4
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

opgave III

1) Zij $U \subset \mathbb{C}$ open γ een gesloten keten in U homoloog met 0. Zij f meromorf op U en zo dat de polen niet op het beeld van γ liggen, dan

6

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum \text{residuen in het binnengebied van } \gamma$$

2) (i) de polen zijn i en $-i$ deze liggen in binnengebied van Γ

5/6

$$\operatorname{Res}_i\left(\frac{\sin(z)}{1+z^2}\right) = \cancel{\cos 1}\ \sin(i)\cdot\frac{1}{2i} = -\tfrac{1}{2}i\sin(i)$$

$$\operatorname{Res}_{-i}\left(\frac{\sin(z)}{1+z^2}\right) = \sin(-i)\cdot\frac{1}{-2i} = -\tfrac{1}{2}i\sin(i)$$

$$\Longrightarrow \int_\Gamma \frac{\sin(z)}{1+z^2}\,dz = 2\pi i\cdot -i\sin(i) = 2\pi\sin(i)$$

$\sin i = ?$

6

(ii) de polen i en $-i$ liggen niet in het binnengebied van $\Gamma = \{z \mid |z| = \tfrac{1}{2}\}$ dus

$\sum$ residuen $= 0$

Conclusie. $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\sin(z)}{1+z^2}\,dz = 0$

3) We merken op dat $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(x)}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{1+x^2}\,dx\right)$

en hierin herkennen we een Fourier Transformatie

De polen liggen niet op de reële as dus dan geldt

z.o.z

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\, dx = 2\pi i \sum \text{residuen in boven halfvlak}$$

~~Het enige resit~~ De enige pool in het boven halfvlak is i

$$\mathrm{Res}_i \left(\frac{e^{ix}}{1+x^2} \right) = e^{-1} \cdot \frac{1}{2i} = -\tfrac{1}{2} i e^{-1}$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\, dx = 2\pi i \cdot -\tfrac{1}{2} i e^{-1} = \frac{\pi}{e}$$

6

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx = \mathrm{Re}\left(\frac{\pi}{e} \right) = \frac{\pi}{e}$$

4) Schrijf $f(z) = (1+z^2)^2$ ~~de~~ het enige nulpunt van f (= pool van $\frac{1}{f}$) in het boven halfvlak is i. Het residu uitrekenen is hier lastiger want de pool is niet meer enkelvoudig

12

Deze pool heeft orde 2

Stel $\frac{1}{f}$ heeft de volgende Laurent ontwikkeling

$$\frac{1}{f} = \frac{a_{-2}}{(z-i)^2} + \frac{a_{-1}}{z-i} + a_0 + a_1(z-i) + \cdots$$

$$\frac{(z-i)^2}{f} = \frac{(z-i)^2}{(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{1}{(z+i)^2} =: g(z) \left(= a_{-2} + a_{-1}(z-i) + \cdots \right)$$

$$g'(z) = \frac{-2}{(z+i)^3} \qquad g'(i) = \frac{-2}{(2i)^3} = -\frac{2}{8} \cdot \frac{1}{-i} = -\tfrac{1}{4} i = a_{-1}$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\pi i \cdot -\tfrac{1}{4} i = \tfrac{1}{2}\pi$$

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 4/4
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

opgave IV 1) Principe van eenduidige analytische voortzetting:
zij $U \subset \mathbb{C}$ open en samenhangend, zij $S \subset U$
met een verz. met verdichtingspunt in het inwendige van U. Zij f en g analytisch op U.
Als $f(s) = g(s)$ $\forall s \in S$ dan is
$f(z) = g(z)$ $\forall z \in U$ (dus $f \equiv g$ op U) ✓

2a) Gegeven is dat f holomorf is op Ω. Dus f voldoet op Ω aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen. Schrijf $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$
dan geldt: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ en $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Als we kunnen aantonen dat F ook aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen voldoet op Ω dan is aangetoond dat F ook holomorf is ✓

$F(z) = \overline{f(\bar{z})} = \overline{f(x-iy)} = u(x,-y) - iv(x,-y)$

Schrijf $u_*(x,y) = u(p(x), q(y))$ met $p(x) = x$ $q(y) = -y$
$v_*(x,y) = -v(p(x), q(y))$
$\Rightarrow F(x+iy) = u_*(x,y) + iv_*(x,y)$ ✓

$$\frac{\partial u_*}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{\partial u}{\partial p} \overset{*}{=} \frac{\partial v}{\partial q} = -\frac{\partial v}{\partial q} \cdot \frac{dq}{dy} = \frac{\partial v_*}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u_*}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial q} \cdot \frac{dq}{dy} = -\frac{\partial u}{\partial q} \overset{*}{=} \frac{\partial v}{\partial p} = \frac{\partial v}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx} = -\frac{\partial v_*}{\partial y}$$

Waarbij we bij $(*)$ gebruik hebben gemaakt van het feit dat f holomorf is en dus aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen voldoet

/

2b) Als $x \in \mathbb{R}$ dan geldt $\overline{x} = x$
Als $f(x) \in \mathbb{R}$ voor $x \in \mathbb{R}$ dan geldt
$F(x) = \overline{f(\bar{x})} = \overline{f(x)} = f(x)$

Dus ~~$F(x) = \overline{f(\bar{x})}$ $\forall$~~ $F(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
We weten dat $\mathbb{R}$ een verdichtingspunt heeft.
Sterker nog: elk punt van $\mathbb{R}$ is een verdichtingspunt van $\mathbb{R}$. En we hebben dat $\mathbb{R} \subset \Omega$

Met het in 1) genoemde principe volgt dan dat $F(z) = f(z) \quad \forall z \in \Omega$

✓